

## Deflexiones en traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga uniformemente distribuida

Gilberto Ramírez-Muñoz, Arnulfo Luévanos-Rojas\*,  
Sandra López-Chavarría, Manuel Medina-Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,  
Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria,  
México

gyram9@gmail.com, {arnulfol\_2007, sandylopez5}@hotmail.com,  
drmanuelmedina@yahoo.com.mx

**Resumen.** Este trabajo muestra las ecuaciones para una viga de sección rectangular con cartelas parabólicas sometida a un momento en cada apoyo y una carga uniformemente distribuida tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener las rotaciones y los desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal en cualquier punto de la viga, que es el principal aporte de esta investigación. El modelo actual considera solo las deformaciones por flexión para obtener las rotaciones y los desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal de la viga. La metodología se desarrolla bajo el concepto de que la integral del momento es la pendiente o rotación y la segunda integración del momento es el desplazamiento vertical de la viga. Asimismo, se hace una comparación entre el modelo propuesto y el modelo actual para vigas simplemente apoyadas y vigas empotradas en ambos extremos con respecto al desplazamiento vertical máximo y su ubicación en la viga. Los resultados muestran que el modelo propuesto es mayor para los dos tipos de vigas para el desplazamiento vertical máximo con respecto al modelo actual. Por tanto, el modelo propuesto es más seguro y más adecuado con respecto al modelo actual para el análisis estructural, ya que las fuerzas cortantes y los momentos flectores están presentes en todas las estructuras y se producen deformaciones por flexión y cortante.

**Palabras clave.** Traves rectangulares, cartelas parabólicas, deformaciones por flexión y cortante, rotaciones, desplazamientos verticales.

## Deflections in Beams of Rectangular Cross Section with Parabolic Haunches Subjected to a Uniformly Distributed Load

**Abstract.** This work shows the equations for a rectangular section beam with parabolic haunches subjected to a moment at each support and a uniformly distributed load taking into account the shear and bending deformations to obtain the rotations and the perpendicular displacements to the longitudinal axis at any point of the beam, which is the main contribution of this research. The current model considers only the bending deformations to obtain the rotations and the perpendicular displacements to the longitudinal axis of the beam. The methodology is developed under the concept that the integral of the moment is the slope or rotation and the second integration of the moment is the vertical displacement of the beam. Also, a comparison is made between the proposed model and the current model for beams fixed at both ends with respect to the maximum vertical displacement and its location on the beam. Results show that the proposed model is greater for beams fixed at both ends in the maximum vertical displacement with respect to the current model. Therefore, the proposed model is safer and more suitable with respect to the current model for structural analysis, since shear forces and bending moments are present in all structures and deformations due to bending and shear occur.

**Keywords.** Rectangular beams, parabolic haunches, bending and shear deformations, rotations, vertical displacements.

## 1. Introducción

La deformación de vigas de concreto reforzado y vigas de acero estructural es una medida importante de su rendimiento de servicio, ya que se requiere específicamente cumplir con los códigos de diseño actuales. Generalmente, las deformaciones de las vigas consisten en deformaciones por flexión y cortante.

En ingeniería estructural, existen dos criterios de diseño para las vigas: la resistencia y la capacidad de servicio.

Las principales publicaciones sobre vigas en voladizo no prismáticas son las de Lee [1], Dado y Al-Sadder [2], Borboni y De Santis [3], Banerjee *et al.* [4], Solano-Carrillo [5], Chen [6], Yau [7], Brojan *et al.* [8].

Algunos investigadores han estudiado el problema de la curva elástica para vigas de secciones prismáticas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una carga uniformemente distribuida y/o carga concentrada tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener las deflexiones en cualquier lugar de la viga (rotaciones y desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal) [9, 10].

Varios autores han desarrollado modelos matemáticos y ayudas de diseño para vigas rectangulares con cartelas rectas o cartelas parabólicas en los extremos para las vigas sometidas a una carga uniformemente distribuida o carga concentrada tomando en cuenta las deformaciones a flexión y cortante [11-18]. Estos documentos muestran los factores para los momentos de empotramiento, factores de arrastre o factores de transporte y factores de rigidez.

Otros autores han presentado modelos óptimos para obtener las dimensiones y el acero de refuerzo longitudinal para vigas rectangulares con cartelas rectas o cartelas parabólicas bajo carga uniformemente distribuida o carga concentrada y momentos en los extremos [19, 20]. Las revisiones de la literatura de las investigaciones desarrolladas y/o comparadas por software se muestran a continuación:

Majumder y Kumar [21] analizaron la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada bajo diferentes tipos de carga.

Las cargas son: a) Carga concentrada en el centro de la viga; b) Carga uniformemente distribuida; c) Carga triangularmente distribuida. El análisis teórico se realizó mediante la Teoría de Euler-Bernoulli (solo considera las deformaciones por flexión) y se comparó con el software ANSYS 14.0. Al comparar los resultados numéricos con los obtenidos por el software ANSYS 14.0, se ha demostrado una excelente precisión del presente método. Si los resultados fueron más precisos entre la teoría de Euler-Bernoulli y el software ANSYS 14.0 como se muestra en las conclusiones, entonces las deformaciones por cortante no se consideran en el software ANSYS 14.0.

Debnath y Debnath [22] estudiaron la deflexión máxima para diferentes vigas de sección transversal rectangular uniforme, y los tipos de vigas son: a) Viga simplemente apoyada con una carga uniformemente distribuida; b) Viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro; c) Viga en voladizo con carga uniformemente distribuida; d) Viga en voladizo con carga concentrada en el extremo.

El cálculo teórico se realizó según la Teoría de Euler-Bernoulli (solo considera las deformaciones por flexión) y el análisis computacional se realizó con el software ANSYS 14.0. Los datos considerados para todas las vigas son:  $L = 100$  m,  $b = 10$  m,  $h = 10$  m,  $\nu = 0.3$ ,  $E = 2 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>,  $F = 500$  N. Los elementos sólidos estudiados fueron 188, 189, 185 y 285.

El resultado más preciso fue medido por el elemento sólido 189 seguido por el elemento sólido 188 y otros elementos sólidos. Si los resultados fueron precisos entre la teoría de Euler-Bernoulli y el software ANSYS 14.0, entonces las deformaciones por cortante se ignoran en el software ANSYS 14.0.

Sihua *et al.* [23] presentaron el análisis no lineal para una viga de concreto reforzado con ayuda del software de análisis de elementos finitos ABAQUS. La viga es simplemente apoyada y tiene 1500 mm de largo; con una sección de 180×100 mm, la resistencia del concreto es C25, el refuerzo longitudinal y estribos adoptados HPB235 reforzados.

En este análisis de vigas simplemente apoyadas, se ha introducido a fondo el modelo de plasticidad del daño del concreto en ABAQUS.

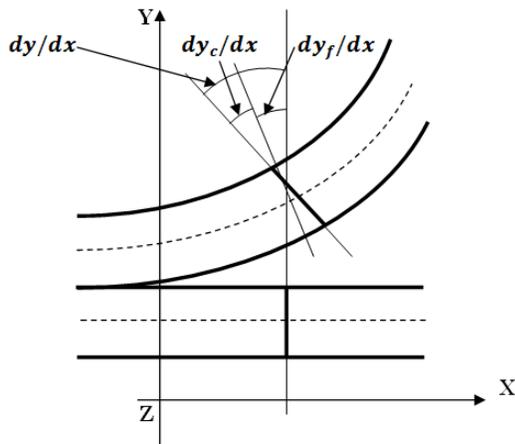


Fig. 1. Deformación de un elemento de viga

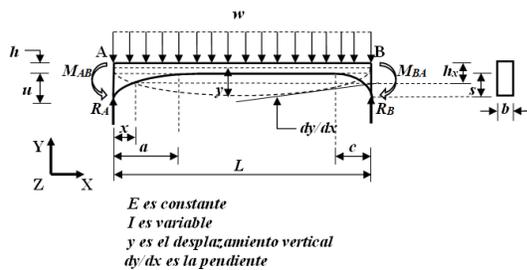


Fig. 2. Viga sometida a un momento en cada extremo y una carga uniformemente distribuida

Finalmente, los resultados de la experimentación y el análisis ABAQUS se compararon en un diagrama, y la carga alcanzó la capacidad de 24 kN, el valor de deflexión en el centro de la longitud de la viga es de 10.521 mm de ABAQUS y 12.795 mm de prueba.

Si se hubieran considerado las deformaciones de cortante en el software ABAQUS, los resultados del software ABAQUS estarían más cerca de la prueba experimental, porque estas deformaciones tienden a aumentar a las deformaciones totales para vigas.

En este trabajo se presenta un modelo matemático de la curva elástica para vigas rectangulares con cartelas parabólicas bajo carga uniformemente distribuida y momentos en los extremos considerando las deformaciones por flexión y cortante (Teoría de Timoshenko) para obtener las rotaciones y desplazamientos en la viga, que es la parte principal de esta

investigación. El modelo propuesto se muestra en tres partes para la viga de  $0 \leq x \leq a$ ,  $a \leq x \leq L - c$  y  $L - c \leq x \leq L$ . El modelo actual de la curva elástica para vigas rectangulares bajo carga uniformemente distribuida considera solo las deformaciones por flexión (Teoría de Euler- Bernoulli).

## 2. Modelo propuesto

La Figura 1 muestra la diferencia entre la teoría de Timoshenko y la teoría de Euler- Bernoulli. La primera teoría incluye el efecto de los esfuerzos de flexión y cortante sobre la deformación ( $dy/dx = dy_c/dx + dy_f/dx$ ), y la segunda teoría incluye el efecto de los esfuerzos de flexión en la deformación ( $dy/dx = dy_f/dx$ ) [24, 25].

La teoría de Timoshenko considera las deformaciones por flexión y cortante, esto es válido para los miembros cortos y largos. La ecuación de la curva elástica se presenta de la siguiente manera [24, 25]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_c}{dx^2} + \frac{d^2y_f}{dx^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w}{GA_{cx}} - \frac{M_z}{EI_z}, \tag{2}$$

donde:  $G$  es el módulo de cortante,  $y$  es el desplazamiento total,  $y_c$  es el desplazamiento por cortante debido a la fuerza cortante,  $y_f$  es el desplazamiento por flexión debido al momento,  $A_{cx}$  es el área de cortante,  $E$  es el módulo de elasticidad,  $M_z$  es el momento de flexión alrededor del eje  $Z$ ,  $I_z$  es el momento de inercia alrededor del eje  $Z$ .

Las rotaciones en cualquier parte de la viga por integración de la ecuación (2) se obtienen:

$$\frac{dy}{dx} = -\int \frac{w}{GA_{cx}} dx - \int \frac{M_z}{EI_z} dx. \tag{3}$$

En la Figura 2 se muestra la viga AB sometida a un momento en cada extremo y una carga uniformemente distribuida, así como su sección transversal rectangular teniendo en cuenta que el ancho "b" es constante y la altura "h<sub>x</sub>" es variable de forma parabólica en sus extremos y constante en la parte central.

**Tabla 1.** Propiedades de la sección rectangular con cartelas parabólicas

Concepto	Ecuaciones		
Intervalo	$0 \leq x \leq a$	$a \leq x \leq L - c$	$L - c \leq x \leq L$
$h_x(x)$	$\frac{a^2h + u(x-a)^2}{a^2}$	$h$	$\frac{c^2h + s(x-L+c)^2}{c^2}$
$A_{cx}(x)$	$\frac{5b[a^2h + u(x-a)^2]}{6a^2}$	$\frac{5bh}{6}$	$\frac{5b[c^2h + s(x-L+c)^2]}{6c^2}$
$I_z(x)$	$\frac{b[a^2h + u(x-a)^2]^3}{12a^6}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b[c^2h + s(x-L+c)^2]^3}{12c^6}$

Los valores de las reacciones en los apoyos  $R_A$  y  $R_B$  se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$R_A = \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L} + \frac{wL}{2}, \tag{4}$$

$$R_B = \frac{wL}{2} - \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L}. \tag{5}$$

El momento alrededor del eje Z a una distancia x es:

$$M_z = R_A x - \frac{wx^2}{2} - M_{AB}. \tag{6}$$

Sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \int \frac{w}{GA_{cx}} dx - \int \frac{R_A x - \frac{wx^2}{2} - M_{AB}}{EI_z} dx. \tag{7}$$

La Tabla 1 muestra las ecuaciones de las alturas " $h_x(x)$ " a una distancia "x", áreas de cortante " $A_{cx}(x)$ " a una distancia "x", y el momento de inercia " $I_z(x)$ " alrededor del eje "z" a una distancia "x" para cada intervalo.

Sustituyendo las propiedades de la Tabla 1 en la ecuación (7) para cada intervalo, y resolviendo la integral se obtienen las rotaciones en cualquier lugar ( $dy/dx$ ), y posteriormente se desarrolla la integral para obtener los desplazamientos en cualquier lugar de la viga (y).

Las ecuaciones para el primer intervalo de  $0 \leq x \leq a$  se muestra en las ecuaciones (8) y (9). Las ecuaciones para el segundo intervalo de  $a \leq x \leq L - c$  se muestra en las ecuaciones (10) y (11). Las ecuaciones para el tercer intervalo de  $L - c \leq x \leq L$  se muestra en las ecuaciones (12) y (13):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{Eb} \left[ \frac{3au(2R_A a - wa^2 - 2M_{AB}) - wa^3h}{16h^2u\sqrt{hu}} \right] \text{Atan} \left[ \frac{u(a-x)}{a\sqrt{hu}} \right] - \frac{wa^3[a^2h(3a+x) + u(a-x)^3] - 4R_A a^6 h}{16hu[a^2h + u(a-x)^2]^2} + \frac{6w}{5Gb} \left[ \frac{a}{\sqrt{hu}} \text{Atan} \left[ \frac{u(a-x)}{a\sqrt{hu}} \right] \right] + C_1, \tag{8}$$

$$y = \frac{12}{Eb} \left[ \frac{a^3h[w(3a-x) - 2R_A] - 3au(2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})(a-x)}{16h^2u\sqrt{hu}} \right] \text{Atan} \left[ \frac{u(a-x)}{a\sqrt{hu}} \right] + \left[ \frac{wa^4h - 3a^2u(2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{32h^2u^2} \right] \ln(h^2u) + \frac{wa^6(h+u) + 2a^4u(R_A x - wax - M_{AB})}{16hu^2[a^2h + u(a-x)^2]} + \frac{6w}{5Gb} \left[ \frac{a^2}{2u} \ln \left[ \frac{a^2h + u(a-x)^2}{a^2h} \right] \right] - \frac{a(a-x)}{\sqrt{hu}} \text{Atan} \left[ \frac{u(a-x)}{a\sqrt{hu}} \right] + C_1 x + C_2, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{Eb} \left( \frac{wx^3}{6h^3} - \frac{R_A x^2}{2h^2} + \frac{M_{AB} x}{h^3} \right) + \frac{6w}{5Gb} \left( -\frac{x}{h} \right) + C_3, \tag{10}$$

$$y = \frac{12}{Eb} \left( \frac{wx^4}{24h^3} - \frac{R_A x^3}{6h^3} + \frac{M_{AB} x^2}{2h^3} \right) + \frac{6w}{5Gb} \left( -\frac{x^2}{2h} \right) + C_3 x + C_4, \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{Eb} \left[ \frac{3cs[2R_A(L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}] - wc^3h}{16h^2s\sqrt{hs}} \right] \text{Atan} \left[ \frac{s(L-x-c)}{c\sqrt{hs}} \right] + \frac{c^2[2R_A(L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}][5c^2h(L-x-c) + 3s(L-x-c)^3]}{16hs^2[c^2h + s(L-x-c)^2]^2} - \frac{wc^4(c^2h[3(L-c) + x] + s(L-x-c)^3) - 4R_A c^6 h}{16hs[c^2h + s(L-x-c)^2]^2} + \frac{6w}{5Gb} \left[ \frac{c}{\sqrt{hs}} \text{Atan} \left[ \frac{s(L-x-c)}{c\sqrt{hs}} \right] \right] + C_5, \tag{12}$$

$$y = \frac{12}{Eb} \left[ \frac{c^3h[w(3(L-c) - x) - 2R_A] - 3cs[2R_A(L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}](L-x-c)}{16h^2s\sqrt{hs}} \right] \text{Atan} \left[ \frac{s(L-x-c)}{c\sqrt{hs}} \right] + \left[ \frac{wc^4h - 3c^2s[2R_A(L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}]}{32h^2s^2} \right] \ln(ch^2s) + \frac{wc^4[c^2h + s(L-c)^2] + 2c^4s[R_A x - w(L-c)x - M_{AB}]}{16hs^2[c^2h + s(L-x-c)^2]} + \frac{6w}{5Gb} \left[ \frac{c^2}{2s} \ln \left[ \frac{c^2h + s(L-x-c)^2}{c^2h} \right] - \frac{c(L-x-c)}{\sqrt{hs}} \text{Atan} \left[ \frac{s(L-x-c)}{c\sqrt{hs}} \right] \right] + C_5 x + C_6. \tag{13}$$

Las seis condiciones conocidas que debe cumplir la viga para obtener las constantes de integración son:

1) Sustituyendo la condición  $x = 0$  e  $y = 0$  en la ecuación (9).

2) Sustituyendo la condición  $x = a$  en las ecuaciones (8) y (10), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " $dy/dx$ " en este punto deben ser las mismas.

3) Sustituyendo la condición  $x = a$  en las ecuaciones (9) y (11), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos “y” en este punto deben ser los mismos.

4) Sustituyendo la condición  $x = L - c$  en las ecuaciones (10) y (12), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones “dy/dx” en este punto deben ser las mismas.

5) Sustituyendo la condición  $x = L - c$  en las ecuaciones (11) y (13), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos “y” en este punto deben ser los mismos.

6) Sustituyendo la condición  $x = L$  e  $y = 0$  en la ecuación (13).

Ahora, sustituyendo las seis condiciones conocidas en las ecuaciones correspondientes, se generan seis ecuaciones para obtener las constantes de integración.

Las constantes de integración se muestran a continuación:

$$C_2 = \frac{12}{Eb} \left\{ \left[ \frac{a^3 h (2R_A - 3wa) + 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{16h^2 u \sqrt{hu}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) - \frac{wa^4 (h+u) - 2M_{AB} a^2 u}{16hu^2 (h+u)} \right. \\ \left. - \left[ \frac{wa^4 h - 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{32h^2 u^2} \right] \ln(h^2 u) \right\} + \frac{6w}{5Gb} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{hu}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) - \frac{a^2}{2u} \ln \left( \frac{h+u}{h} \right) \right\} \quad (14)$$

$$C_4 = \frac{12}{Eb} \left\{ \left[ \frac{a^3 h (2R_A - 3wa) + 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{16h^2 u \sqrt{hu}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) - \frac{R_A a^3 (3h + 8u) + wa^4 (3h + 2u)}{24h^3 s} + \frac{M_{AB} a^2 (3h + 4u)}{8h^3 (h + u)} \right. \\ \left. + \frac{6w}{5Gb} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{hu}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) - \frac{a^2}{2h} - \frac{a^2}{2u} \ln \left( \frac{h+u}{h} \right) \right\} \right\} \quad (15)$$

$$C_6 = \frac{12}{Eb} \left\{ \frac{R_A [8s(L-c)^3 + 3c^2 h(L-c)]}{24h^3 s} - \frac{w[2s^2(L-c)^4 + 3c^2 h s(L-c)^2 + c^4 h^2]}{16h^3 s^2} - \frac{M_{AB} [4s(L-c)^2 - c^2 h]}{24h^3 s} - \frac{R_A a^3 (3h + 8u) + wa^4 (3h + 2u)}{16h^3 u} \right. \\ \left. - \frac{8h^3 s}{32h^2 s^2} \left[ \frac{wa^4 h - 3c^2 s [2R_A (L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}]}{16h^3 u} \right] \ln(ch^2 s) + \frac{M_{AB} a^2 (3h + 4u)}{8h^3 (h + u)} \right. \\ \left. - \left[ \frac{a^3 h (3wa - 2R_A) - 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{16h^2 u \sqrt{hu}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \frac{6w}{5Gb} \left\{ \frac{(L-c)^2 - a^2}{2h} - \frac{a^2}{2u} \ln \left( \frac{h+u}{h} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{hu}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right\} \right\} \quad (16)$$

$$C_5 = \frac{12}{Eb} \left\{ \frac{w[(h+s)(L-c)^2 [2s(L-c)^2 + 3c^2 h] + L^2 c^2 h^2]}{16Lh^2 s(h+s)} - \frac{R_A [(h+s)(L-c) [8s(L-c)^2 + 3c^2 h] + 3Lc^2 h^2]}{24Lh^3 s(h+s)} - \frac{wa^4 (3h + 2u) + R_A a^3 (3h + 8u)}{16Lh^3 u} \right. \\ \left. - \frac{M_{AB} a^2 (3h + 4u)}{8Lh^3 (h+u)} + \frac{M_{AB} [4(h+s)(L-c)^2 - c^2 h]}{8Lh^3 (h+s)} \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^3 h (3wa - 2R_A) - 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{16Lh^2 u \sqrt{hu}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \left[ \frac{c^3 h [w(2L-3c) - 2R_A] + 3c^2 s [2R_A (L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}]}{16Lh^2 s \sqrt{hs}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \frac{6w}{5Gb} \left\{ \frac{a^2 - (L-c)^2}{2Lh} + \frac{a^2}{2Lu} \ln \left( \frac{h+u}{h} \right) - \frac{c^2}{2Ls} \ln \left( \frac{h+s}{h} \right) - \frac{a^2}{L\sqrt{hu}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c^2}{L\sqrt{hs}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h}} \right) \right\} \right\} \quad (17)$$

$$C_3 = \frac{12}{Eb} \left\{ \frac{R_A a^3 (3h + 8u)}{24Lh^3 u} + \frac{R_A [(h+s) [4s(L-c)^2 (L+2c) + 3c^2 h(L+c)] - 3Lc^2 h^2]}{24Lh^3 s(h+s)} \right. \\ \left. - \frac{M_{AB} a^2 (3h + 4u)}{8Lh^3 (h+u)} - \frac{wa^4 (3h + 2u)}{16Lh^3 u} \right. \\ \left. - \frac{w[(h+s)(L-c) [2s(L-c)^2 (L+3c) + 3c^2 h(L+3c)] - 3L^2 c^2 h^2]}{48Lh^3 s(h+s)} \right. \\ \left. - \frac{M_{AB} [4(h+s)(L^2 - c^2) + c^2 h]}{8Lh^3 (h+s)} \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^3 h (3wa - 2R_A) - 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{16Lh^2 u \sqrt{hu}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \left[ \frac{c^3 h [w(2L-3c) - 2R_A] + 3c^2 s [2R_A (L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}]}{16Lh^2 s \sqrt{hs}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \frac{6w}{5Gb} \left\{ \frac{L^2 + a^2 - c^2}{2Lh} + \frac{a^2}{2Lu} \ln \left( \frac{h+u}{h} \right) - \frac{c^2}{2Ls} \ln \left( \frac{h+s}{h} \right) - \frac{a^2}{L\sqrt{hu}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c^2}{L\sqrt{hs}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h}} \right) \right\} \right\} \quad (18)$$

$$C_1 = \frac{12}{Eb} \left\{ \frac{R_A [4s(L-c)^2 (L+2c) + 3c^2 h(L+c)]}{24Lh^3 s} - \frac{w(L-c) [2s(L-c)^2 (L+3c) + 3c^2 h(L+3c)]}{48Lh^3 s} - \frac{M_{AB} (L^2 - c^2)}{24Lh^3 s} \right. \\ \left. + \frac{wa^4 (3h + 2u) (4L - 3c)}{48Lh^3 s} - \frac{R_A a^3 [6L(h+2u) - a(3h+8u)]}{24Lh^3 s} \right. \\ \left. + \frac{M_{AB} a [a(3h+4u) - 8L(h+u)]}{48Lh^3 u} + \frac{c^2 (wL^2 h - 2R_A Lh - 2M_{AB} s)}{24Lh^3 u} \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^3 h (3wa - 2R_A) - 3a^2 u (2R_A a - wa^2 - 2M_{AB})}{16Lh^2 u \sqrt{hu}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \left[ \frac{c^3 h [w(2L-3c) - 2R_A] + 3c^2 s [2R_A (L-c) - w(L-c)^2 - 2M_{AB}]}{16Lh^2 s \sqrt{hs}} \right] \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ \left. + \frac{6w}{5Gb} \left\{ \frac{(L-a)^2 - c^2}{2Lh} + \frac{a^2}{2Lu} \ln \left( \frac{h+u}{h} \right) - \frac{c^2}{2Ls} \ln \left( \frac{h+s}{h} \right) - \frac{a^2}{L\sqrt{hu}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{h}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c^2}{L\sqrt{hs}} \operatorname{Atan} \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h}} \right) \right\} \right\} \quad (19)$$

### 3. Verificación del modelo propuesto

Una manera de verificar el modelo propuesto es como siguiente:

1. Sustituyendo el valor de “ $M_{AB} = 0$ ,  $R_A = wL/2$ ,  $a = c$ ,  $u = s$  y  $dy/dx = 0$ ” para vigas de sección transversal rectangular simplemente apoyadas en la ecuación (10) se obtiene “ $x = L/2$ ”, es decir, cuando la rotación es cero, se produce el desplazamiento máximo (viga simétrica).

2. Sustituyendo el valor de “ $x = a$ ” en la ecuación (8) y (10), los valores obtenidos de las dos ecuaciones son iguales, es decir, la continuidad está garantizada en este punto para las rotaciones.

3. Sustituyendo el valor de “ $x = L - c$ ” en la ecuación (10) y (12), los valores obtenidos de las dos ecuaciones son iguales, es decir, la continuidad está garantizada en este punto para las rotaciones.

4. Sustituyendo el valor de “ $M_{AB} = 0$ ,  $R_A = wL/2$ ,  $a = 0$ ,  $c = 0$  y  $x = L/2$ ” para vigas simplemente apoyadas de sección transversal rectangular constante en la ecuación (11) se obtiene el desplazamiento máximo “ $y_{\max} = wL^2(24Eh^2 + 25GL^2)/160bh^3EG = 5wL^4/384EI(1 + 48EI/5GA_s L^2)$ ”, presentada por Timoshenko y

Tabla 2. Viga simplemente apoyada

h/L	c/L	s/h	Factores de las rotaciones en el apoyo A y en el apoyo B						Factores del desplazamiento máximo y su ubicación a partir del apoyo A																
			$\beta_{AB}$			$\beta_{BA}$			$\epsilon$			$\rho$													
			MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA											
<b>0.1</b>													<b>a/L = 0.2; u/h = 1</b>												
0.2	0.4	483.43	470.23	1.0281	-495.60	-481.86	1.0285	0.5009	0.5009	1.0000	-157.6912	-154.1430	1.0230												
		0.6	482.88	469.70	1.0281	-490.16	-476.64	1.0284	0.5006	0.5006	1.0000	-157.4166	-153.8753	1.0230											
		1.0	482.00	468.84	1.0281	-482.00	-468.84	1.0281	0.5000	0.5000	1.0000	-156.9742	-153.4447	1.0230											
		1.5	481.16	468.02	1.0281	-474.85	-462.02	1.0278	0.4994	0.4994	1.0000	-156.5530	-153.0354	1.0230											
		2.0	480.50	467.38	1.0281	-469.64	-457.07	1.0275	0.4990	0.4990	1.0000	-156.2247	-152.7170	1.0230											
<b>0.5</b>													<b>a/L = 0.5; u/h = 1</b>												
0.5	0.4	363.88	352.34	1.0328	-405.13	-392.52	1.0321	0.5117	0.5117	1.0000	-132.6755	-129.3991	1.0253												
		0.6	357.01	345.56	1.0331	-381.10	-369.00	1.0328	0.5072	0.5072	1.0000	-129.1762	-125.9432	1.0257											
		1.0	346.07	334.76	1.0338	-346.07	-334.76	1.0338	0.5000	0.5000	1.0000	-123.6656	-120.5061	1.0262											
		1.5	335.80	324.64	1.0344	-316.45	-305.89	1.0345	0.4933	0.4932	1.0002	-118.5626	-115.4775	1.0267											
		2.0	327.89	316.86	1.0348	-295.61	-285.61	1.0350	0.4881	0.4881	1.0000	-114.6835	-111.6594	1.0271											
<b>0.2</b>													<b>a/L = 0.2; u/h = 1</b>												
0.2	0.4	65.38	58.78	1.1123	-67.10	-60.23	1.1141	0.5010	0.5009	1.0002	-21.0419	-19.2679	1.0921												
		0.6	65.31	58.71	1.1124	-66.34	-59.58	1.1135	0.5006	0.5006	1.0000	-21.0050	-19.2344	1.0921											
		1.0	65.19	58.60	1.1125	-65.19	-58.60	1.1125	0.5000	0.5000	1.0000	-20.9454	-19.1806	1.0920											
		1.5	65.07	58.50	1.1123	-64.17	-57.75	1.1112	0.4994	0.4994	0.9998	-20.8882	-19.1294	1.0919											
		2.0	64.98	58.42	1.1123	-63.42	-57.13	1.1101	0.4990	0.4990	1.0000	-20.8435	-19.0896	1.0919											
<b>0.5</b>													<b>a/L = 0.5; u/h = 1</b>												
0.5	0.4	49.81	44.04	1.1310	-55.37	-49.07	1.1284	0.5115	0.5117	0.9996	-17.8131	-16.1749	1.1013												
		0.6	48.92	43.19	1.1327	-52.18	-46.12	1.1314	0.5070	0.5072	0.9996	-17.3594	-15.7429	1.1027											
		1.0	47.50	41.85	1.1350	-47.50	-41.85	1.1350	0.5000	0.5000	1.0000	-16.6430	-15.0633	1.1049											
		1.5	46.16	40.58	1.1375	-43.52	-38.24	1.1381	0.4934	0.4932	1.0004	-15.9772	-14.4347	1.1069											
		2.0	45.13	39.61	1.1394	-40.70	-35.70	1.1401	0.4882	0.4881	1.0002	-15.4695	-13.9574	1.1083											

Gere [24, 25], para sección transversal rectangular constante (las deformaciones por flexión y cortante se consideran).

5. Sustituyendo el valor de "x = 0" en la ecuación (9) se obtiene el desplazamiento cero en el apoyo A.

6. Sustituyendo el valor de "x = L" en la ecuación (13) se obtiene el desplazamiento cero en el apoyo B.

7. Sustituyendo el valor de "x = a" en la ecuación (9) y (11), los valores obtenidos de las dos ecuaciones son iguales, es decir, la continuidad está garantizada en este punto para los desplazamientos.

8. Sustituyendo el valor de "x = L - c" en la ecuación (11) y (13), los valores obtenidos de las dos ecuaciones son iguales, es decir, la continuidad está garantizada en este punto para los desplazamientos.

9. Si se desprecian las deformaciones por cortante, las condiciones anteriores también se verifican y la flecha máxima para la condición de simetría es: " $y_{\max} = 5wL^4/32bh3E = 5wL^4/384EI$ ", para sección transversal constante (las

deformaciones por flexión se consideran únicamente).

10. Si se desprecian las deformaciones por cortante y el valor de " $M_{AB} = wL^2/12$ ,  $R_A = wL/2$  y  $a = c = 0$ " para vigas rectangulares con apoyos fijos en sus extremos de sección transversal constante se sustituyen en la ecuación (8) se obtiene " $dy/dx = 0$ ", es decir, la rotación en el soporte A es cero.

11. Si se desprecian las deformaciones por cortante y el valor de " $M_{AB} = wL^2/12$ ,  $R_A = wL/2$  y  $a = c = 0$ " para vigas rectangulares con apoyos fijos en sus extremos de sección transversal constante se sustituyen en la ecuación (12) se obtiene " $dy/dx = 0$ ", es decir, la rotación en el soporte B es cero.

Por lo tanto, el modelo propuesto en este artículo de la curva elástica para vigas de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas bajo cargas uniformemente distribuidas y momentos en sus extremos considerando las deformaciones por flexión y cortante (teoría de Timoshenko) es válido.

Tabla 3. Viga empotrada en sus dos extremos

h/L	c/L	s/h	Factores de momentos de empotramiento y reacciones en el apoyo A						Factores del desplazamiento máximo y su ubicación a partir del apoyo A																
			$m_{AB}$			$\alpha_{AB}$			$\epsilon$			$\rho$													
			MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA											
<b>0.1</b>													<b>a/L = 0.2; u/h = 1</b>												
0.2	0.4	0.1020	0.1022	0.9980	0.5177	0.5181	0.9992	0.5159	0.5174	0.9971	-23.0340	-19.4949	1.1815												
		0.6	0.0994	0.0995	0.9990	0.5106	0.5108	0.9996	0.5096	0.5106	0.9980	-21.8765	-18.3382	1.1929											
		1.0	0.0955	0.0955	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	-20.2782	-16.7487	1.2107											
		1.5	0.0923	0.0922	1.0011	0.4910	0.4908	1.0004	0.4915	0.4906	1.0018	-18.8692	-15.3540	1.2289											
		2.0	0.0900	0.0899	1.0011	0.4846	0.4843	1.0006	0.4853	0.4837	1.0033	-17.9613	-14.3894	1.2482											
<b>a/L = 0.5; u/h = 1</b>																									
0.5	0.4	0.1167	0.1171	0.9966	0.5352	0.5360	0.9985	0.5268	0.5293	0.9953	-17.5394	-14.2959	1.2269												
		0.6	0.1113	0.1116	0.9973	0.5221	0.5227	0.9989	0.5166	0.5184	0.9965	-16.0968	-12.9248	1.2454											
		1.0	0.1025	0.1025	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	-13.8806	-10.7211	1.2947											
		1.5	0.0941	0.0937	1.0043	0.4782	0.4774	1.0017	0.4840	0.4819	1.0044	-11.9922	-8.9222	1.3441											
		2.0	0.0877	0.0870	1.0080	0.4610	0.4595	1.0033	0.4713	0.4672	1.0088	-10.6353	-7.6098	1.3976											
<b>0.2</b>													<b>a/L = 0.2; u/h = 1</b>												
0.2	0.4	0.1016	0.1022	0.9941	0.5169	0.5181	0.9977	0.5126	0.5174	0.9907	-4.2076	-2.4369	1.7266												
		0.6	0.0992	0.0995	0.9970	0.5102	0.5108	0.9988	0.5077	0.5106	0.9943	-4.0618	-2.2923	1.7719											
		1.0	0.0955	0.0955	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	-3.8583	-2.0936	1.8429											
		1.5	0.0925	0.0922	1.0033	0.4913	0.4908	1.0010	0.4933	0.4906	1.0055	-3.6684	-1.9193	1.9113											
		2.0	0.0903	0.0899	1.0044	0.4852	0.4843	1.0019	0.4885	0.4837	1.0099	-3.5590	-1.7987	1.9787											
<b>a/L = 0.5; u/h = 1</b>																									
0.5	0.4	0.1156	0.1171	0.9872	0.5333	0.5360	0.9950	0.5217	0.5293	0.9856	-3.4339	-1.7870	1.9216												
		0.6	0.1106	0.1116	0.9910	0.5208	0.5227	0.9964	0.5133	0.5183	0.9904	-3.2280	-1.6097	2.0053											
		1.0	0.1025	0.1025	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	-2.9199	-1.3401	2.1789											
		1.5	0.0948	0.0937	1.0117	0.4797	0.4774	1.0048	0.4876	0.4819	1.0118	-2.6590	-1.1153	2.3841											
		2.0	0.0891	0.0870	1.0241	0.4640	0.4595	1.0098	0.4783	0.4672	1.0238	-2.4646	-0.9512	2.5910											

## 4. Resultados

La Tabla 2 muestra la comparación de los dos modelos para obtener los factores para las rotaciones en los apoyos y los desplazamientos máximos para una viga simplemente apoyada, el modelo propuesto (MP) es el modelo matemático presentado en este trabajo tomando en cuenta las deformaciones por cortante y flexión, y el modelo actual (MA) considera únicamente las deformaciones por flexión.

La Tabla 2 presenta para  $h = 0.1L$  y  $h = 0.2L$ . Estas comparaciones se realizan para  $G = 5E/12$  para concreto,  $a = 0.2L, 0.5L$ ;  $u = h$ ;  $c = 0.2L, 0.5L$ ;  $s = 0.4h, 0.6h, h, 1.5h, 2h$ .

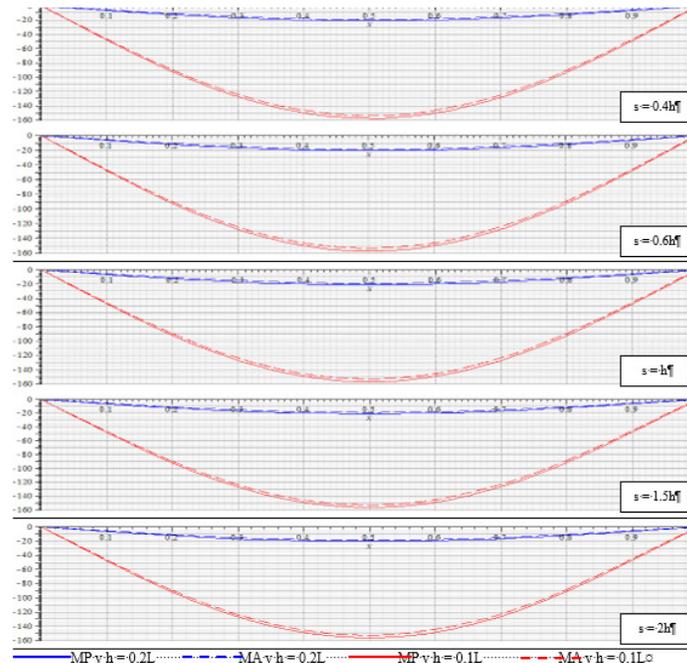
dónde:  $\Theta_{AB}$  (rotación en el apoyo A) =  $\beta_{AB}WL/Eb$ ;  $\Theta_{BA}$  (rotación en el apoyo B) =  $\beta_{BA}WL/Eb$ ;  $x_{AB}$  (ubicación del momento máximo a partir del apoyo A) =  $\epsilon L$ ;  $y_{max}$  (desplazamiento máximo) =  $\rho WL/Eb$ .

Tal como se muestra en la Tabla 2, los factores en las rotaciones para los apoyos "A" y "B" están influenciados por la altura "h".

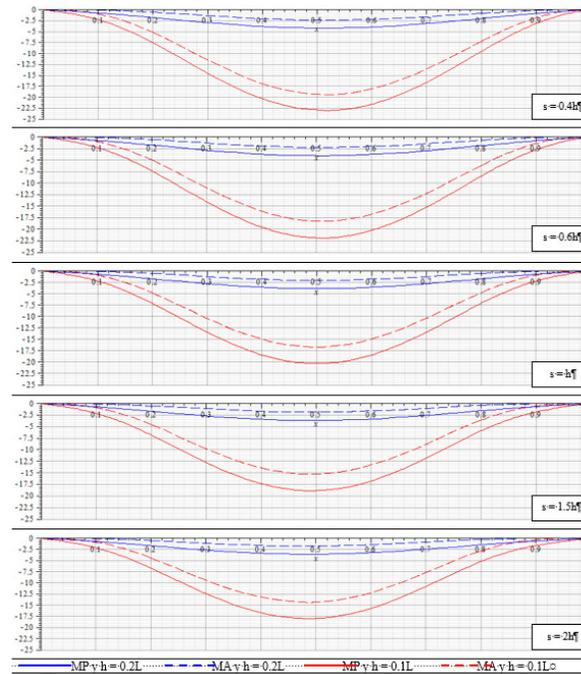
A medida que aumenta la altura de las cartelas en el apoyo "B" se observa una disminución (valor absoluto) de estos factores para el mismo apoyo "B" y en el apoyo "A" se produce una disminución, esto es para los dos modelos.

Además, los factores en los desplazamientos máximos están influenciados por la altura "h". A medida que aumenta la altura de las cartelas en el apoyo "B" se observa una disminución de estos factores, esto es para los dos modelos.

De acuerdo a los resultados, el modelo propuesto es mayor en todos los casos para las rotaciones en los apoyos y los desplazamientos máximos, y para los dos casos en  $h = 0.2L$ , donde la mayor diferencia es de 14.01% para la rotación en el apoyo "B", y para los desplazamientos máximos es de 10.83%.



**Fig. 3.** Deflexiones en vigas simplemente apoyadas para  $a = 0.2L$ ,  $c = 0.2L$  y  $u = h$



**Fig. 4.** Deflexiones en vigas empotradas en sus extremos para  $a = 0.2L$ ,  $c = 0.2L$  y  $u = h$

La Tabla 3 presenta la comparación de los dos modelos para encontrar los factores de los

momentos y reacciones en el apoyo A y los desplazamientos máximos para una viga

empotrada en ambos extremos. La Tabla 3 presenta  $h = 0.1L$  y  $h = 0.2L$ . Estas comparaciones se realizan para  $G = 5E/12$  para concreto,  $a = 0.2L$ ,  $a = 0.5L$ ;  $u/h = 1.0$ ;  $c = 0.2L$ ,  $0.5L$ ;  $s = 0.4h$ ,  $0.6h$ ,  $h$ ,  $1.5h$ ,  $2h$ .

La Tabla 3 se obtienen substituyendo  $G = 5E/12$ ;  $a = 0.2L$ ,  $0.5L$ ;  $u = h$ ;  $c = 0.2L$ ,  $c = 0.5L$ ;  $s = 0.4h$ ,  $0.6h$ ,  $h$ ,  $1.5h$ ,  $2h$ ;  $h = 0.1L$ ,  $0.2L$ ;  $x = 0$  en la ecuación (8) y  $x = L$  en la ecuación (12) y estas ecuaciones se hacen iguales a cero. Posteriormente, estas dos ecuaciones se resuelven para obtener el momento de empotramiento en el apoyo "A" " $M_{AB} = m_{ABWL}^2$ " y la reacción en el apoyo "A" " $R_A = \alpha_{ABWL}$ ". El momento de empotramiento en el apoyo "B" " $M_{BA} = m_{BAWL}^2$ " y la reacción en el apoyo "B" " $R_B = \alpha_{BAWL}$ " se obtienen por equilibrio estático.

dónde:  $M_{AB}$  (momento de empotramiento en el apoyo A) =  $m_{ABWL}^2$ ;  $R_{AB}$  (reacción en el apoyo A) =  $\alpha_{ABWL}$ .

Tal como se presenta en la Tabla 3, los factores para los momentos y reacciones en el apoyo "A" están influenciados por la altura "h". A medida que se aumenta la altura de las cartelas en el apoyo "B" se observa una disminución de estos factores para el apoyo "A" en ambos factores, esto es para los dos modelos. Además, los factores en los desplazamientos máximos están influenciados por la altura "h".

A medida que se aumenta la altura de las cartelas en el apoyo "B" se observa una disminución (valor absoluto) de estos factores, esto es para los dos modelos. De acuerdo a los resultados, el modelo propuesto para los momentos y para las reacciones en el apoyo "A" es menor en  $s = 0.4h$ ,  $0.6h$ ; igual en  $s = h$ ; y mayor en  $s = 1.5h$ ,  $2h$ , y los desplazamientos máximos son mayores, y para los dos casos en  $h = 0.2L$ , donde la mayor diferencia es de 2.41 % para los momentos, para las reacciones en el apoyo "A" es de 1.0098 veces el modelo propuesto con respecto al modelo actual, y para los desplazamientos máximos es de 2.5910 veces el modelo propuesto con respecto al modelo actual.

La Figura 3 muestra la curva elástica para una viga rectangular simplemente apoyada con cartelas parabólicas bajo carga uniformemente distribuida para valores de  $G = 5E/12$ ;  $a = 0.2L$ ;  $u = h$ ;  $c = 0.2L$ ;  $s = 0.4h$ ,  $0.6h$ ,  $h$ ,  $1.5h$ ,  $2h$ ;  $h = 0.1L$ ,

$0.2L$  por el modelo propuesto "MP" y el modelo actual "MA".

La Figura 4 muestra la curva elástica para una viga rectangular empotrada en sus extremos con cartelas parabólicas bajo carga uniformemente distribuida para valores de  $G = 5E/12$ ;  $a = 0.2L$ ;  $u = h$ ;  $c = 0.2L$ ;  $s = 0.4h$ ,  $0.6h$ ,  $h$ ,  $1.5h$ ,  $2h$ ;  $h = 0.1L$ ,  $0.2L$  por el modelo propuesto "MP" y el modelo actual "MA".

Figura 4. Deflexiones en vigas empotradas en sus extremos para  $a = 0.2L$ ,  $c = 0.2L$  y  $u = h$

Los valores de la curva elástica (deflexiones) para la viga simplemente apoyada es mayor para el modelo propuesto con respecto al modelo actual para  $h = 0.1L$  y  $h = 0.2L$ , y los valores mayores se presentan para  $h = 0.1L$  (ver Figura 3). Para la viga empotrada en ambos extremos es mayor para el modelo propuesto con respecto al modelo actual para  $h = 0.1L$  y  $h = 0.2L$ , y los valores mayores son para  $h = 0.1L$  (ver Figura 4).

## 5 Conclusiones

El modelo propuesto para obtener las rotaciones y los desplazamientos en cualquier lugar de la viga de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas bajo una carga uniformemente distribuida y momentos en los extremos considerando las deformaciones por flexión y cortante (teoría de Timoshenko) ha sido desarrollado para el caso general.

La técnica matemática presentada en esta investigación es adecuada para encontrar las rotaciones y las deflexiones en cualquier lugar de la viga sometida a una carga uniformemente distribuida y cualquier tipo de momentos aplicados en sus extremos, debido a que se muestran las fórmulas matemáticas de la curva elástica.

Las principales conclusiones son:

- 1 El modelo actual no está influenciado por la relación "h/L" para las vigas empotradas en sus extremos para los momentos y reacciones en el apoyo "A", y la ubicación de los desplazamientos máximos, y también para las vigas simplemente apoyadas en la ubicación de los desplazamientos máximos.
- 2 La mayor diferencia se presenta en "h = 0.20L" con respecto a "h = 0.10L", es decir, a

mayor relación de “h/L” aparece mayor diferencia para las vigas simplemente apoyadas en las rotaciones para los apoyos “A” y “B”, y los desplazamientos máximos, y para las vigas empotradas en ambos extremos para los momentos y reacciones en el apoyo “A”, y los desplazamientos máximos.

- 3 El modelo propuesto para las vigas simplemente apoyadas es mayor en todos los casos para las rotaciones en los apoyos y para los desplazamientos máximos con respecto al modelo actual.
- 4 El modelo propuesto para las vigas empotradas en ambos extremos es menor en  $s = 0.4h, 0.6h$ ; igual en  $s = h$ ; y mayor en  $s = 1.5h, 2h$  para los momentos y para las reacciones en el apoyo “A”, y para los desplazamientos máximos son mayores con respecto al modelo actual.
- 5 Los factores de los momentos de empotramiento se pueden verificar en el documento propuesto por Velázquez-Santillán [13].

Los desplazamientos máximos por el modelo propuesto (las deformaciones por flexión y cortante se consideran) son mayores para las vigas simplemente apoyadas, y para las vigas empotradas en ambos extremos respecto al modelo actual (las deformaciones por flexión se consideran).

Por lo tanto, las deflexiones máximas que actúan sobre las vigas del modelo propuesto en este trabajo deben compararse con las deflexiones máximas permitidas por los códigos de construcción, porque en algunas condiciones podría ser que no cumpla con los estándares establecidos por los códigos de construcción.

Entonces, el modelo propuesto es más apropiado y seguro con respecto al modelo actual para el análisis estructural, debido a que los esfuerzos cortantes y los momentos flectores están presentes en cualquier tipo de estructura y aparecen deformaciones por flexión y cortante.

Las sugerencias para futuras investigaciones pueden ser: 1) Cuando la carga aplicada es diferente a una carga uniformemente distribuida; 2) Cuando la sección transversal de la viga sea diferente a una rectangular.

## Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de doctorado Gilberto Ramírez Muñoz (CVU: 547985) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico.

## Referencias

1. **Lee, K. (2002).** Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, No. 3, pp. 439–443. DOI: 10.1016/s0020-7462(01)00019-1.
2. **Dado, M., Al-Sadder, S. (2005).** A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams. *Mechanics Research Communications*, Vol. 32, No. 6, pp. 692–703. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2005.01.004.
3. **Borboni, A., De-Santis, D. (2014).** Large deflection of a non-linear, elastic, asymmetric Ludwick cantilever beam subjected to horizontal force, vertical force and bending torque at the free end. *Meccanica*, Vol. 49, No. 6, pp. 1327–1336. DOI: 10.1007/s11012-014-9895-z.
4. **Banerjee, A., Bhattacharya, B., Mallik, A. K. (2008).** Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43, No. 5, pp. 366–376. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.12.020.
5. **Solano-Carrillo, E. (2009).** Semi-exact solutions for large deflections of cantilever beams of non-linear elastic behavior. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 2, pp. 253–256. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.007.

6. **Chen, L. (2010).** An integral approach for large deflection cantilever beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 3, pp. 301–305. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004.
7. **Yau, J. D. (2020).** Closed-form solution of large deflection for a guyed cantilever column pulled by an inclination cable. *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 18, No. 1, pp. 130–136. DOI: 10.51400/2709-6998.1874.
8. **Brojan, M., Cebron, M., Kosel, F. (2012).** Large deflections of non-prismatic non-linearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end. *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28, No. 3, pp. 863–869. DOI: 10.1007/s10409-012-0053-3.
9. **Luévanos-Rojas, A. (2014).** A mathematical model of elastic curve for simply supported beams subjected to a uniformly distributed load taking into account the shear deformations. *ICIC Express Letters Part B: Applications*, Vol. 5, No. 3, pp. 885–890.
10. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Kalashnikov, V. V. (2016).** A mathematical model of elastic curve for simply supported beams subjected to a concentrated load taking into account the shear deformations. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 1, pp. 41–54. DOI: 10.24507/ijicic.12.01.41.
11. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 3, pp. 973–985. DOI: 10.24507/ijicic.12.03.959.
12. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 1027–1041. DOI: 10.24507/ijicic.12.04.1027.
13. **Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 2, pp. 557–568. DOI: 10.13053/CyS-23-2-2872.
14. **Sandoval-Rivas, R., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 3, pp. 1115–1124. DOI: 10.13053/CyS-23-3-2873.
15. **Montano-Perez, B. E., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Jaramillo-Rosales, M. (2020).** Design aids for rectangular cross-section beams with straight haunches: Part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 1915–1928. DOI: 10.24507/ijicic.16.06.1915.
16. **Gaona-Tamez, L. L., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Jaramillo-Rosales, M. (2020).** Design aids for rectangular cross-section beams with straight haunches: Part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 1929–1942. DOI: 10.24507/ijicic.16.06.1929.
17. **Crispín-Herrera, C. Y., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2021).** Ayudas de diseño para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1. *Computación y Sistemas*, Vol. 25, No. 3. DOI: 10.13053/cys-25-3-3777.
18. **Luévanos-Soto, R. M., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2021).** Ayudas de diseño para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2. *Computación y Sistemas*, Vol. 25, No. 4. DOI: 10.13053/CyS-25-4-3778.
19. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Kalashnikov, V. V. (2020).** Optimal design of reinforced concrete beams for rectangular sections with straight

- hanchos. *Revista de la Construcción*, Vol. 19, No. 1. DOI: 10.7764/RDLC.19.1.90-102.
- 20. García-Canales, E., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2020).** Costo mínimo para trabes rectangulares de concreto reforzado con cartelas parabólicas. *Computación y Sistemas*, Vol. 24, No. 3. DOI: 10.13053/CyS-24-3-3306.
- 21. Majumder, G., Kumar, K. (2013).** Deflection and stress analysis of a simply supported beam and its validation using ANSYS. *International Journal of Mechanical Engineering and Computer Applications*, Vol. 1, No. 5, pp. 17–20.
- 22. Debnath, V., Debnath, B. (2014).** Deflection and stress analysis of a beam on different elements using ANSYS APDL. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*, Vol. 5, No. 6, pp. 70–79.
- 23. Sihua, D., Ze, Q., Li, W. (2015).** Nonlinear analysis of reinforced concrete beam bending failure experimentation based on ABAQUS. *International Conference on Information Sciences, Machinery, Materials and Energy*, Published by Atlantis Press, pp. 440–444. DOI: 10.2991/icismme-15.2015.88.
- 24. Timoshenko, S. P. (1947).** *Strength of materials: Part I. Elementary Theory and Problems*, 2nd Edition, Van Nostrand Company, New York.
- 25. Timoshenko, S. P., Gere, J. M. (1972).** *Mechanics of materials*, Van Nostrand Reinhold, New York.

*Article received on 23/03/2022; accepted on 08/04/2024.  
\*Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.*