Computación y Sistemas Vol. 5 No. 3 pp. 215 - 222
© 2002, CIC - IPN. *ISSN 1405-5546* Impreso en México

Análisis de Dos Métodos de Estimación para Sistemas Lineales Estacionarios e Invariantes en el Tiempo con Perturbaciones Correlacionadas con el Estado Observable del Tipo: Una Entrada una Salida

Analysis of Two Estimation Methods for Stationary and Invariant in Time Linear Systems with Disturbances Correlated with the Observable State of the Type: One Input one Output

José de Jesús Medel Juárez
Centro de Investigación en Computación - IPN
Av. Juan de Dios Bátiz y Miguel Othón de Mendizabal Ote.
U.P. A.L.M, C.P. 07738 México, D. F., e-mail : jjmedel@cic.ipn.mx

Artículo recibido en febrero 02, 1999; aceptado en diciembre 12, 2001

Resumen

*En este trabajo se presenta un análisis comparativo tanto teórico como práctico entre dos métodos de estimación: **Mínimos Cuadrados (MC) y Variable Instrumental (VI)**, para sistemas que contienen perturbaciones internas y externas, correlacionadas con el estado observable.*

Al utilizar la teoría de procesos estocásticos dentro del análisis teórico, se presentan algunas diferencias básicas entre ambos métodos. Se desarrollan dos teoremas que incluyen resultados comparativos entre ambos. A través de una simulación observamos en forma ilustrativa el desempeño de los estimadores para un sistema en ecuaciones en diferencias de primer orden, invariantes en el tiempo, y de naturaleza estacionaria.

La gráfica de estimación para los métodos considerados, nos muestra visualmente qué método es más conveniente usar, para este tipo de sistemas.

Palabras clave: Teoría de filtrado, mínimos cuadrados, variable instrumental, estimación.

Abstract

This study presents a comparative theoretical analysis and practice implementation, between two estimators: Least Square Method and Instrumental Variable Method, for systems with internal and external perturbations, correlated with observable state. In theorical sense, the stochastic process was considered, and the basic differences between both estimators were exposed: Two theorems gives the principal properties of both estimators. In practice sense, the simulation result illustrated the properties of both estimators for invariant and stationary model and noises correlated with observable state.

Keywords: Filter Theory, Least Square Method, Instrumental Variable Method, Estimaton.

1 Introducción

A través de su historia, el hombre ha tratado de describir de una manera precisa la mayor cantidad de características intrínsecas de los sistemas, con el objetivo de predecir, regular y, controlar su comportamiento bajo diferentes condiciones de funcionamiento. A la manera de eliminar, extraer o resaltar algunas de las características de los sistemas se le ha llamado filtrado (ver: El diccionario Larousse, 1997; Diccionario de la Real Academia Española, 2000; y el libro de Haykin, 1991).

Haykin (1991), comenta: "*El término filtro a menudo es usado para describir alguna característica intrínseca de un sistema a través de la información emitida por su estado o estados observables*".

El hablar de información *emitida*, significa: Considerar al estado o estados observables del sistema interactuando con el conjunto de perturbaciones tanto internas como externas, que modifican su funcionamiento ideal.

La teoría de filtrado puede dividirse en dos áreas básicas (conforme a lo publicado por Haykin, 1991), siempre y cuando el sistema a analizar, pueda ser descrito por ecuaciones diferenciales o en diferencias (ambas formadas por parámetros y estados); y de acuerdo a su naturaleza, estas áreas son:

a) ***Estimación***: Es el área que se encarga de analizar y de describir el comportamiento de los parámetros del sistema, e
b) ***Identificación***: Es el área que se encarga de analizar y de describir el comportamiento de los estados del sistema.

En este trabajo, nos enfocaremos tan solo al área de *estimación* para sistemas lineales discretos e invariantes.

El filtrado, aplicado en diferentes áreas de la ingeniería (eléctrica, mecánica, electrónica, neumática, y civil entre otras) por algunos investigadores (tales como, Åström y Witenmark, 1990_a; Söderström y Estoica, 1988_a; Ljung , 1987, Ljung y Söderström, 1983), al usar algunas técnicas matemáticas para la *estimación* de sistemas, coinciden en sus respectivos libros y artículos en comentar: "*La técnica de estimación es una aproximación experimental de los parámetros del modelo a los parámetros del sistema*". Estos investigadores recomiendan para realizar un filtrado, los siguientes pasos:

a) *Planeación experimental,*
b) *Selección de la estructura del modelo,*
c) *Estimación,*
d) *Identificación, y*
e) *Validación del modelo.*

En la práctica, los modelos son de naturaleza recursiva; pasando en todo momento por los cinco pasos mencionados para obtener un modelo satisfactorio que describa de una manera casi exacta la realidad o la evolución de las características del sistema que se esta analizando.

El *proceso de estimación* se basa en: ***a)*** Monitorear los estados que emite el sistema para la selección del modelo a utilizar como filtro, ***b)*** Extraer la información necesaria para describir de los parámetros del sistema.

En general, los estados contienen perturbaciones, que pueden ser originadas por varias causas: Desde errores propiciados por el emisor (el sistema), hasta errores de lectura provocados en el receptor (osciloscopios, tarjetas de adquisición, entre otros); pasando en todo momento por la influencia del medio ambiente que rodea tanto al emisor como al receptor.

Las operaciones que se pueden realizar en un filtro, aplicables a la estimación de parámetros, son:

I) ***Filtrado***. Es la operación de extracción de información y descripción del sistema (conocido como emisor) durante el intervalo $[t, t+\varepsilon)$, a través de la información adquirida por parte del receptor, en el intervalo $[t, t+\delta)$. Con $\delta<<\varepsilon$, y $\delta, \varepsilon \in R^+$. Una vez que el receptor ha adquirido información del emisor en el intervalo $[t, t+\delta)$, el tiempo restante dentro del intervalo $[t, t+\varepsilon)$ (descrito por la diferencia entre ε y δ) lo dedica el receptor al análisis de información y a la emisión de resultados que describen el comportamiento interno y/o externo del sistema analizado.

II) ***Reconstrucción***. Es la operación de extracción de información de interés del sistema en el intervalo $[t, t+\varepsilon)$, cumpliendo las condiciones de la operación del filtrado, pero ahora se describirá el comportamiento del sistema en un intervalo de tiempo anterior $[t-\varepsilon, t)$, con $\varepsilon \in R^+$.

III) ***Predicción***. Es la operación de descripción del comportamiento del sistema para un intervalo posterior ($[t+\varepsilon, t+2\varepsilon)$) al intervalo en el que recibe, analiza la información, y predice el comportamiento futuro del mismo (en el intervalo $[t,t+\varepsilon)$).

Los estimadores a desarrollar en este trabajo serán: ***a)*** De grado y orden uno, respecto a la variable a observar (ver por ejemplo: Chen, 1997), al considerar que el sistema real da una respuesta causal (ver por ejemplo: Kailath, 1980; Chen, 1997; entre otros.). ***b)*** Estocásticos, al considerar que la señal observable contiene un conjunto de perturbaciones del tipo aditivo, de las cuales podemos conocer sus primeros dos momentos de probabilidad. En base a los que se construye un estimador estocástico lineal, minimizando los efectos del ruido a su salida de acuerdo a algún criterio.

Para cuantificar la eficiencia de un estimador se propone utilizar un funcional (conocido como funcional del error (ver por ejemplo: Haykin, 1991; Poznyak y Medel, 1999_a y 1999_b). Este criterio para el caso presente queda descrito por el segundo momento de probabilidad a través de la diferencia entre la señal estimada y la señal original.

Algunas de las propiedades que tiene el sistema es su *estacionariedad*: Propiedad que tienen los sistemas de naturaleza estocástica (ver: Cramér y Leadbetter, 1968).

Una señal es de naturaleza estacionaría sí sus momentos de probabilidad son finitos y en específico si sus dos primeros momentos están acotados para cualquier intervalo de tiempo $[t,t+\varepsilon)$ (ver: Cramér y Leadbetter, 1968_a).

La teoría de Procesos estocásticos ha sido utilizada por diversos investigadores para la estimación de parámetros (ver: Lewis, 1986; Kalmam, 1960; Haykin, 1991 y las referencias contenidas en su libro; Poznyak y Medel, 1999_a y 1999_b; entre otros).

Otra de las propiedades probabilísticas de esta clase de sistemas está definida por su invarianza (ver: Cramér y Leadbetter, 1968_b), i.e., que el parámetro(s) del sistema permanezca constante(s) a través del tiempo en probabilidad uno.

Es así como Heunis (1993) utilizó, la Teoría de Probabilidad Invariante, y comenta que la suma del funcionamiento de una secuencia idénticamente distribuida con media cero y variables aleatorias acotadas en su segundo momento (σ^2), es aproximadamente en *casi todos los puntos* (c.t.p) a una muestra generada utilizando la teoría del Movimiento Browniano, permitiéndole obtener con mucho detalle las características del comportamiento asintótico de la suma de las variables aleatorias. Motivado por el principio de invarianza, su objetivo fue obtener una aproximación de estos procesos continuos a través de procesos en diferencias por algunos procesos estándares cuyas propiedades de muestreo son expuestas por Isermann (1989). Finalizó Heunis su trabajo con un ejemplo ilustrativo, y comenta: Se observa la aplicabilidad de estos resultados, ya que con un algoritmo iterativo y utilizando el *Teorema del Limite Central*, se obtiene un funcional en donde la convergencia del proceso es muy buena, en el sentido antes mencionado.

Söderström y Estoica (1988$_a$) presentan tres métodos para realizar la estimación:

a) Método de Steiglitz - McBride (MSM) (conocido como el método de mínimos cuadrados recursivo)

b) Método del Gradiente Recursivo (MGR)

c) Método de Variable Instrumental (MVI).

Estos métodos son comparados en la convergencia local y global, concluyendo en su trabajo de 1988$_b$: *la mejor alternativa para la estimación de parámetros en los sistemas estocásticos con perturbaciones correlacionadas, es usar el método de la variable instrumental(VI).*

Fan y Nayeri (1989), aplicaron los algoritmos estudiados por Söderström y Estoica en (1988$_a$), a un filtro en forma recursiva y de orden reducido; y llegaron a la conclusión de que cada método tiene algunas ventajas con respecto a los otros dos.

Retomando sus resultados, expuestos en 1989, Fan y Nayeri (1990) utilizaron un filtro de orden reducido y concluyeron que los métodos MSM y MGR dan una buena convergencia local y global; pero para filtros de orden pleno, la mejor solución es el uso del MVI.

Wie y Kumar (1994) utilizaron las técnicas de los esquemas Indirecto y Desacoplado en conjunto con los métodos de mínimos cuadrados y gradiente expuesto en Söderström, y Estoica (1988$_b$), para estimar a los parámetros de un sistema, concluyendo que con ambas técnicas se puede obtener buena convergencia paramétrica.

Poznyak y Medel (1999$_a$ y 1999$_b$) utilizaron a la variable instrumental y al factor de olvido para la estimación de parámetros variantes en el tiempo. Sus resultados fueron novedosos, ya que los compararon con respecto a los modos deslizantes, y al gradiente estocástico, en sistemas MIMO ("Multi Input Multi Output": muchas entradas-muchas salidas), con una convergencia a los parámetros reales de un 99.99%.

Ogata (1980), recomienda que al medir y estimar continuamente las características dinámicas de un sistema, no se debe afectar el funcionamiento normal del mismo, ya que se alterarían muchas de sus características (recomendación seguida por los autores anteriormente citados, pero que no la expresan en sus trabajos en forma explicita).

Podemos observar que existen diferentes estudios sobre la estimación de parámetros. Pero no se precisa en forma clara, cuál es el método a utilizar de acuerdo a la información que recibe el filtro o estimador. Por tal motivo se sugiere realizar un análisis teórico comparativo entre dos métodos de estimación.

En la siguiente sección se presenta un análisis comparativo entre dos métodos de estimación para sistemas lineales con las siguientes características: Discretos con perturbaciones internas y externas correlacionadas con la señal observable, del tipo estacionario e invariante en el tiempo. Los métodos elegidos son: *Mínimos Cuadrados* (MC) y el de *Variable Instrumental* (VI).

2 Comparación Probabilística Entre los Métodos de VI y de MC

Dentro de la teoría de filtrado podemos encontrar dos técnicas ampliamente usadas para la estimación de parámetros. Ellas son conocidas bajo los nombres de *Mínimos Cuadrados* (MC) y de *Variable Instrumental* (VI).

En esta sección se presenta la diferencia entre ambos métodos cuando el sistema tiene perturbaciones internas y externas, ambas correlacionadas con su estado observable.

El modelo considerado para tal caso es un modelo discreto de una entrada una salida (conocido por sus siglas en ingles como SISO, "Single Input Single Output": Una entrada – una salida), representado bajo la estructura siguiente:

$$X_{k+1} = aX_k + W_{1k} \qquad (1)$$

$$Y_k = X_k + W_{2k} \qquad (2)$$

Donde W_{1k} y W_{2k} son las perturbaciones internas y externas del sistema, respectivamente. X_k, es el estado del sistema en el tiempo *k*. Y_k, es el estado del sistema observable; *es decir, la salida del sistema* en el tiempo *k*. Donde *k* es la medida del intervalo: [t, t+ε), y representa el tiempo en el cual el computador adquiere, analiza y describe el comportamiento interno y/o externo del sistema real.

Comentario 1: El error de estimación está definido para ambos modelos, por la siguiente ecuación en diferencias (ver: Poznyak y Medel, 1999$_a$ y en 1999$_b$):

$$\Delta_n := \hat{a}_n + a \qquad (2')$$

El estimador de parámetros por el *método de mínimos cuadrados* (MMC) es expresado en el siguiente resultado.

Teorema 1: *Dado el sistema descrito por las ecuaciones (1 y 2), con ruidos correlacionados (ver: Ash, 1968) con el estado* observable *(ver: Kailath, 1980), su estimador* *converge utilizando al método de mínimos cuadrados (MMC), al parámetro a estimar más un delta, esto es:*

$$\hat{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.t.p} a + \Delta_n \quad (2'').$$

Prueba: *Dado el sistema descrito por las ecuaciones (1 y 2), el estimador de parámetros por el método de mínimos cuadrados, de acuerdo a lo escrito por Young (1984), se define por:*

$$\hat{a}_n := \left(\sum_{k=1}^{n} Y_{k+1} Y_k^T\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k Y_k^T\right)^{-1} \quad (3)$$

Si nuestro sistema cuenta con las perturbaciones correlacionadas con el estado observable, pero entre ellas no existe correlación, probabilisticamente esto significa considerar las siguientes propiedades (ver: Ash, 1968):

$$E\{W_{2\,k+1} Y_k^T\} = 0 \quad (4)$$

$$E\{W_{2\,k} Y_k^T\} = \sigma^2_{w_{2,K}}, \quad (5)$$

$$E\{W_{1\,k} Y_k^T\} = \sigma^2_{w_{1,K}}, \quad (6)$$

$$E\{W_{2\,k} W_{2\,k}^T\} = \sigma^2_{w_{2,K}}, \quad (7)$$

$$E\{W_{1\,k} W_{1k}^T\} = \sigma^2_{w_{1,K}}, \quad (8)$$

$$E\{W_{1\,k} W_{2\,k}^T\} = 0. \quad (9)$$

El estado observable desplazado un instante, es expresado (usando la teoría de cálculo en diferencias):

$$Y_{k+1} = X_{k+1} + W_{2\,k+1}; \quad (10)$$

al sustituir la ecuación de estados, expresada en (1), dentro de la ecuación (10):

$$Y_{k+1} = aX_k + W_{1k} + W_{2\,k+1}. \quad (11)$$

De la ecuación (2) podemos obtener el estado del sistema en función del estado observable (ver: Kailath, 1980) y de las perturbaciones:

$$X_k = Y_k - W_{2\,k}. \quad (12)$$

La ecuación (11) se transforma al considerar a la ecuación (12) en:

$$Y_{k+1} = aY_k - aW_{2\,k} + W_{1k} + W_{2\,k+1}. \quad (13)$$

El estimador de parámetros expresado en la ecuación (3) adquiere la forma:

$$\hat{a}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} (aY_k - aW_{2k} + W_{1k} + W_{2\,k+1}) Y_k^T\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k Y_k^T\right)^{-1} \quad (14)$$

Las diferentes condiciones que cumple el sistema, expresadas en las ecuaciones de la (4) a la (9), dentro de la ecuación (14), nos permiten obtener:

$$\hat{a}_n = a - (a\sigma^2_{w_{2,K}} - \sigma^2_{w_{1,K}})\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k Y_k^T\right)^{-1}. \quad (15)$$

El segundo momento de probabilidad del estado observable, para un sistema invariante en el tiempo (como es el caso del sistema expresado por las ecuaciones (1) y (2)), es desarrollado en función de la ecuación (10):

$$E\{Y_{k+1} Y_{k+1}^T\} =$$
$$= E\{X_{k+1} X_{k+1}^T\} + 2E\{X_{k+1} W_{2\,k+1}^T\} + E\{W_{2\,k+1} W_{2\,k+1}^T\}; \quad (16)$$

y recordando que el sistema es estacionario (ver: Cramér y Leadbetter en 1968$_b$):

$$E\{W_{2\,k+1} W_{2\,k+1}^T\} = \sigma^2_{w_{2,K}} \quad (17)$$

De igual forma, para el estado del sistema tenemos que:

$$E\{X_{k+1} X_{k+1}^T\} \xrightarrow[n\to\infty]{c.t.p} \frac{\sigma^2_{w_{1,K}}}{1-a^2} \quad (18)$$

El segundo momento del estado observable, considerando a las expresiones (17) y (18), finalmente es descrito por:

$$E\{Y_k Y_k^T\} = \frac{\sigma^2_{w_{1,K}}}{1-a^2} + \sigma^2_{w_{2,K}} \quad (19)$$

Este último resultado dentro de la ecuación (14) nos permite conocer la convergencia del parámetro estimado:

$$\hat{a}_n = a - \frac{(a\sigma^2_{w_{2,n}} - \sigma^2_{w_{1,n}})}{\frac{\sigma^2_{w_{1,n}}}{1-a^2} + \sigma^2_{w_{2,n}}} + O_w(1) \quad (20)$$

El error existente entre el valor estimado y el real es expresado por:

$$\Delta_n = \frac{(a\sigma^2_{w_{2,n}} - \sigma^2_{w_{1,n}})}{\frac{\sigma^2_{w_{1,n}}}{1-a^2} + \sigma^2_{w_{2,n}}} + O_w(1); \quad (21)$$

donde $O_w(1)$ es un error de medición, que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

En general lo que nos dice la expresión (21) es que el error de estimación está en función de las variancias de los ruidos; así como también de la magnitud del parámetro a estimar ■.

Se puede decir a través del resultado de este teorema, que los sistemas con perturbaciones correlacionadas, en general no deben utilizar el método de mínimos cuadrados (MMC), para realizar estimación de parámetros.

Ahora consideremos al método de la variable instrumental (MVI) para el sistema descrito por las ecuaciones *(1 y 2)*.

Teorema 2: *Dado el sistema descrito por las ecuaciones (1 y 2), con ruidos correlacionados (ver: Ash, 1968) con el estado* <u>*observable*</u> *(ver: Kailath, 1980). Su estimador al utilizar el método de variable instrumental (MVI) descrito por Young en 1984, converge al parámetro a estimar, esto es:*

$$\hat{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.t.p} a .$$

Prueba: *Considerando que el sistema descrito por las ecuaciones (1) y (2) con perturbaciones correlacionadas (ver: Ash, 1968) y utilizando a la variable instrumental descrita por Söderström y Estoica en 1988a; cumple con las siguientes restricciones:*

$$E\{W_{2\,k+1} Z_k^T\} = 0 , \qquad (22)$$

$$E\{W_{2\,k} Z_k^T\} = 0 , \qquad (23)$$

$$E\{W_{1\,k} Z_k^T\} = 0 , \qquad (24)$$

$$E\{W_{2\,k} W_{2\,k}^T\} = \sigma^2_{w_{2,K}} , \qquad (25)$$

$$E\{W_{1\,k} W_{1\,k}^T\} = \sigma^2_{w_{1,K}} , \qquad (26)$$

$$E\{W_{1\,k} W_{2\,k}^T\} = 0 . \qquad (27)$$

El estimador está definido por Söderström y Estoica en 1988$_b$, por la siguiente expresión:

$$\hat{a}_n := \left(\sum_{k=1}^{n} Y_{k+1} Z_k^T\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k Z_k^T\right)^{-1} ; \qquad (28)$$

donde Z_k^T es nuestra variable instrumental.

Al sustituir en la expresión (2') a la expresión (28); y cumpliendo con las restricciones de la (22) a la (27); podemos decir que el parámetro estimado converge al parámetro real. Entonces (2') converge a cero; es decir:

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.t.p} 0$$

■.

Este estimador de parámetros, podemos considerarlo como ideal para sistemas con ruidos correlacionados con nuestro estado observable.

Comentario 2: El error de estimación está definido para ambos modelos por la expresión descrita en (2'). La pregunta obligada es: ¿Cómo seleccionar a la mejor variable instrumental (VI) de tal manera que cumpla las condiciones (22) a la (27) y que haga converger el estimador al parámetro real?

Un buen resultado fue expresado por Söderström y Estoica en 1988$_b$, y consiste en considerar a la variable instrumental igual a:

$$Z_k = Y_{k-1} . \qquad (28')$$

Por los resultados obtenidos en los dos teoremas anteriores, se considera al método de variable instrumental (MVI) el adecuado para estimar a sistemas que tienen ruidos correlacionados con el estado observable. La aplicación de este método en una computadora digital puede expresarse en forma recurrente para observar y cuantificar su desempeño a través del funcional del error descrito en (2') durante un tiempo ***T*** para describir la evolución del parámetro o parámetros del sistema analizado.
El tiempo ***T***, esta definido por el intervalo de tiempo en el cual el parámetro estimado converge al parámetro real, con una aproximación de un α (α es el error mínimo de estimación, considerando al truncamiento y redondeo de cifras que usan los lenguajes de programación y los sistemas digitales inmersos en la computadora a utilizar,).

3 Estimación de Parámetros Usando al Método de la Variable Instrumental en Forma Recurrente

El sistema a utilizar, es el expresado por las ecuaciones (1) y (2). El método con el cual se trabajará para realizar la estimación de parámetros es el de la *variable instrumental* (MVI) por el resultado obtenido en el *Teorema 2*.

El estimador es descrito por la ecuación siguiente:

$$\hat{a}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_{k+1} Z_k^T\right) \Gamma_n , \qquad (29)$$

de tal forma que la matriz de ganancias simbolizada por Γ_n, es definida:

$$\Gamma_n := \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k Z_k^T\right)^{-1} = \left(\Gamma_{n-1}^{-1} + Y_n Z_n^T\right)^{-1} , \qquad (30)$$

y que también es descrita en forma inversa:

$$\Gamma_n^{-1} = \Gamma_{n-1}^{-1} + Y_n Z_n^T , \qquad (31)$$

que al multiplicar por la izquierda ambos miembros de la expresión anterior, por la matriz de ganancias Γ_n, obtenemos:

$$I = \Gamma_{n-1}^{-1} \Gamma_n + Y_n Z_n^T \Gamma_n . \qquad (32)$$

Con este nuevo resultado usamos a la fórmula de Faddev (ver: Kailath, 1980) para expresar en forma recurrente a la matriz de ganancias:

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1}^{-1} - \frac{\Gamma_{n-1}^{-1} Y_n Z_n^T \Gamma_{n-1}^{-1}}{1 + Z_n^T \Gamma_{n-1}^{-1} Y_n} \qquad (33)$$

La forma recurrente del estimador de parámetros, utilizando a la matriz de ganancias es:

$$\hat{a}_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} Y_{k+1} Z_k^T \Gamma_{n-1} \Gamma_{n-1}^{-1} + Y_{n+1} Z_n^T \right) \Gamma_n \quad ; (34)$$

el estimador de parámetros un instante anterior al tiempo n es:

$$\hat{a}_{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} Y_{k+1} Z_k^T \right) \Gamma_{n-1} \quad , (35)$$

y al reemplazarlo dentro de la ecuación (34) tendremos, que el estimador toma la forma:

$$\hat{a}_n = \left(\hat{a}_{n-1} \Gamma_{n-1}^{-1} + Y_{n+1} Z_n^T \right) \Gamma_n \quad ; (36)$$

realizando las operaciones entre términos dentro de la expresión (36):

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n-1} \Gamma_{n-1}^{-1} \Gamma_n + Y_{n+1} Z_n^T \Gamma_n \quad , (37)$$

recordando que:

$$\Gamma_{n-1}^{-1} = \Gamma_n^{-1} - Y_n Z_n^T \quad ; (38)$$

el estimador tiene la estructura:

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n-1} \left(\Gamma_n^{-1} - Y_n Z_n^T \right) \Gamma_n + Y_{n+1} Z_n^T \Gamma_n \quad . (39)$$

De tal manera que realizando operaciones algebraicas dentro de la ecuación (39):

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n-1} - Y_n Z_n^T \Gamma_n + Y_{n+1} Z_n^T \Gamma_n \quad ; (40)$$

llegamos a obtener la forma simplificada y recurrente del estimador:

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n-1} + \left(I - \hat{a}_{n-1} \right) Y_{n+1} Z_n^T \Gamma_n \quad . (41)$$

Este resultado es implementado dentro de una computadora digital, considerando que el sistema es invariante en el tiempo y estacionario (ver: Cramér y Leadbetter, 1968_a y 1968_b), requiriendo tan solo dos instantes de tiempo: El presente en el instante *(n)* y el pasado inmediato en el tiempo *(n-1)*. Esto permite ahorrar en memoria del computador y en tiempo de procesamiento, ya que el estimador depende sólo de un estado anterior.

4 Simulaciones

En esta sección se presenta un ejemplo ilustrativo que nos permite observar en forma ilustrativa el desempeño de los dos métodos anteriormente evaluados. Se considera un sistema de primer orden, estacionario e invariante en el tiempo; que es descrito por las ecuaciones (1) y (2), que en particular, es:

$$X_{k+1} = 0.3X_k + W_{1k} \quad , (42)$$

$$Y_k = X_k + W_{2k} \quad . (43)$$

Este sistema cumple con las condiciones expresadas en las ecuaciones (22) a la (27), tanto para el *método de mínimos cuadrados (MMC)*, expresada en (3), como para el de la *variable instrumental (MVI)*, expresada en (28'). Para realizar las simulaciones se utilizó al software MatLab (1984).

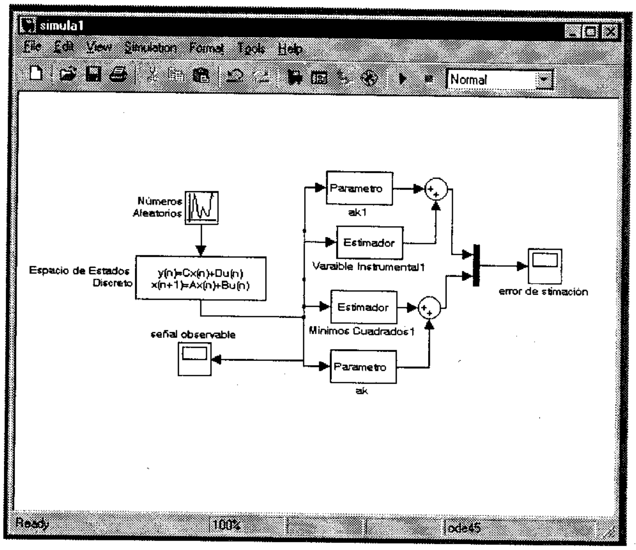

Figura 1. (Diagrama a bloques realizado en Simulink: Versión de objetos de MatLab (1984)

En la *Figura 1*, se muestra el diagrama realizado en Simulink, en el que se describe a bloques: 1) El sistema con entrada estocástica; así como, 2) Los estimadores de parámetros (MC y VI).

Los resultados de la simulación realizados en MatLab con Simulink (1984), son:

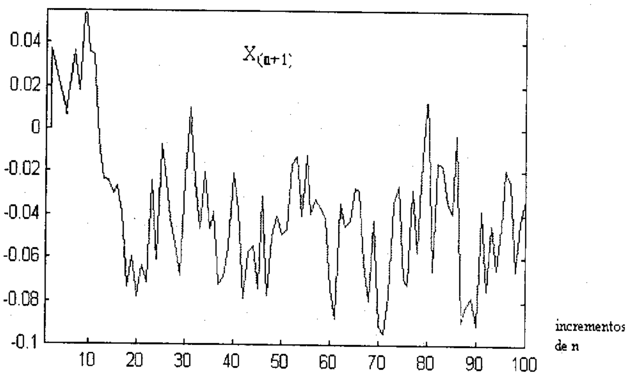

Figura 2. (Observación del estado del sistema)

En la *Figura 2*, se observa el desempeño del estado interno del sistema, el cual se encuentra acotado en sus dos primeros momentos de probabilidad, de acuerdo a las condiciones de linealidad del sistema considerado en este trabajo (ver: Kailath, 1980; Chen, 1997; Cramér y Leadbetter, 1968_a y 1968_b).

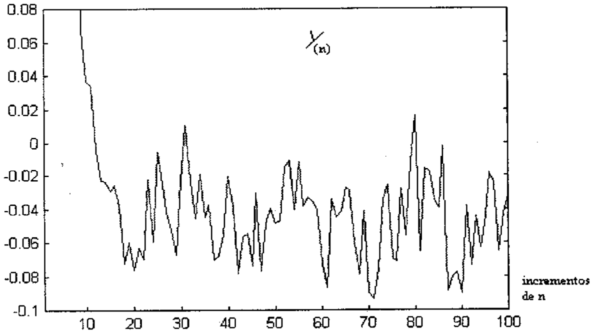

Figura 3. (Observación del estado de salida del sistema)

En la *Figura 3*, se puede observar el estado observable del sistema, acotado en sus dos primeros momentos de probabilidad, de acuerdo a las condiciones de linealidad del sistema considerado (ver: Kailath, 1980; Chen, 1997; Cramér y Leadbetter, 1968_a y 1968_b).

El estimador de parámetros usando al método de mínimos cuadrados, expresado en el *Teorema 1* por la ecuación (3) y el de la *variable instrumental*, expresado en el *Teorema 2* en la ecuación (28'). Queda determinado ilustrativamente en la *Figura 4*:

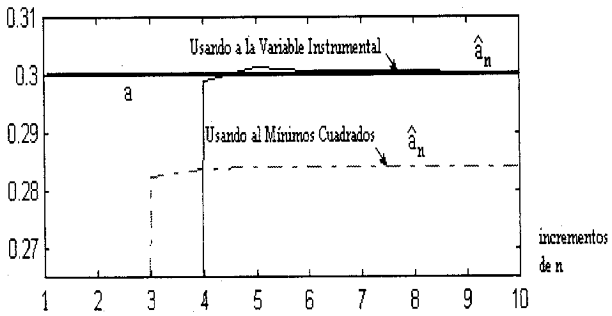

Figura 4. (Comparación de la estimación realizada por el método de M. C y el de V. I)

En la *Figura 4*, se puede observar que el mejor estimador para sistemas estacionarios e invariantes en el tiempo con perturbaciones correlacionadas con el estado observable, es el *método de la variable instrumenta (VI)*.

El modelo expresado en la ecuación (42) puede tener cualquier valor que se encuentre dentro de un circulo unitario (ver: Isermann, 1989), esto significa que $|a| <= 1$.

5 Conclusiones

El método de mínimos cuadrados y el de la variable instrumental son herramientas usadas para la *estimación* de parámetros.

De los *teoremas 1 y 2* se concluye:

a) Los *sistemas que tienen perturbaciones correlacionadas* tanto internas como externas, con la señal observable, *sus parámetros deben ser estimados por el método de la variable instrumental(VI)*.
b) *Los sistemas con perturbaciones que no se encuentren correlacionadas* con el estado observable, se puede utilizar al *método de mínimos cuadrados* (MMC); sin embargo, tendría problemas de convergencia, ya que dentro de la prueba del *Teorema 1*, las varianzas que incluye este estimador, y que son diferentes de cero, actuarían dentro del estimador.

En el presente trabajo se consideró que el sistema descrito por las ecuaciones (1) y (2), tiene perturbaciones correlacionadas con la señal observable. Se desarrollo una simulación para observar gráficamente el comportamiento de ambos métodos, concluyendo:

a) El *método de variable instrumental (VI)* tiene una mejor aproximación al parámetro real que el *método de mínimos cuadrados (MMC)*.
b) El grado de aproximación del *MMC* depende como se vio en el *Teorema 1*, de las varianzas y de la magnitud del propio parámetro a estimar, lo que hace que su convergencia sea menor que la del método de variable instrumental *(VI)*.

Los resultados teóricos y prácticos permiten observar las ventajas de usar a la variable instrumental *(VI)* en vez del tradicional método de mínimos cuadrados *(MMC)*.

Bibliografía

Ash, R., *Real Analysis and Probability*, Academic Press, United States of America, 1968, pp. 229.

Åström, K. J., y Wittenmark, B., *Computer Controlled Systems*, 2ª Ed, Prentice Hall, 1990.

Cramér, H., y Leadbetter, M. R., *Stationary an Related Stochastic Processes: Sample Funciton Properties and Their Applications*, John Wiley & Sons. Inc, 1968, pp. 120 – 122.

Cramér, H., y Leadbetter, M. R., *Stationary an Related Stochastic Processes: Sample Funciton Properties and Their Applications,* John Wiley & Sons. Inc., 1968, pp. 150 – 152.

Chen, D. K., *Analysis of Linear Systems,* Addison Wesley Publishing Company Inc., 1997.

Diccionario de la Real Academia Española, 2000.

Fan, H., y Nayeri, M., "Stability of some system identification techniques for underparameterized IIR adaptive filters", *IEEE Transaction on Circuits and Systems,* vol. 3, 1989, pp 1748 - 1751.

Fan, H., y Nayeri, M., "On reduced order identification"; revisiting On some system identification techniques for adaptive filters" *IEEE Transaction on Circuits and Systems,* v. 37, Iss. 9, 1990, pp. 1144 - 1151.

Haykin, S., *Adaptive Filter Theory,* 2^a Ed, Prentice Hall, 1991.

Heunis, A., "Rates of convergence for an adaptive filtering Algorithm ", *IEEE, Conference on Decision and Control,* vol. 4, 1993, pp. 3866 - 3898.

Kailath, T., "Linear Systems", Prentice Hall, United States of America, 1980.

Kalman, R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME -- Journal of Basic Engineering,* 1960, pp. 35 - 45.

Isermann, R., Digital Control Systems, Springer Verlag, vol. 1, 2^{nd} Ed, 1989.

Larousse, Diccionario Enciclopédico, 1997.

Lewis, F. L., *Optimal Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory.* John Wiley & Sons, New York, 1986.

Ljung, L., *Systems Identification and estimation: Theory for the User.* Prentice Hall, 1987.

Ljung, L., y **Söderström, T.**, *Theory and Practice of Recursive Estimations and Identification,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1983.

MatLab Co., Math Works ver. 4.0., 1984,

Ogata, K., *Ingeniería de Control Moderna,* Prentice Hall Hispanoamericana, Primera Edición, 1980, pp. 858-861.

Poznyak, A. S; y **Medel Juárez J. J.**, "Matrix Forgetting Factor", *International Journal of Systems Science,* vol. 30, n.-2, 1999_a, pp. 165 – 174.

Poznyak, A. S., y **Medel Juárez J. J.**, "Matrix Forgetting Factor with Adaptation", *International Journal of Systems Science,* vol. 30, n.-8, 1999_b, pp. 865 – 878.

Söderström, T., y **Estoica, P.**, *Systems Identification,* Prentice Hall International, Hemal, Hempstead, Hertfordshire, England, 1988_a.

Söderström, T., y **Estoica, P.,** "On Some System Identification Techniques for Adaptive Filtering", *IEEE Transaction of Circuits and Systems,* vol. 35, Iss. 4, 1988_b, pp. 457 - 461.

Wei, R., y **Kumar, P. R.,** "Stochastic adaptive prediction and model reference control", *IEEE Transaction on Automatic Control,* vol. 39, Iss. 10, 1994, pp. 2047 - 2060.

Young, P., *Recursive Parameter Estimation,* Lancaster, England, 1984.

José de Jesús Medel Juárez *nació en la Ciudad de México en abril 6 de 1970. En 1998 obtuvo el grado de Doctor en Ciencias en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Desde 1999 es Profesor Titular e Investigador del Centro de Investigación en Computación.. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Cuenta con más de quince artículos internacionales con refereo y relacionados al tema aquí desarrollado. Ha graduado a más de cuatro alumnos de postgrado y se encuentra dirigiendo investigaciones y tesis de doctorado. El Dr. Medel ha impartido cursos sobre Teoría de Control, Filtrado y Simulación de Procesos. Es actualmente líder de un programa de investigación sobre teoría de filtrado.*